Solutions des récréations scientifiques

1. RENCONTRE FACE À FACE, PROPOSÉ PAR D. INDJOUDJIAN (X41)

À côté des listes des résultats des pièces A et B, je dresse la liste « miroir » des résultats de B, où pile et face sont échangés. Si l'égalité des nombres de face se réalise en k tirages, m pour A comme pour B, il y a $k - m$ face dans la liste miroir et k face dans cette liste jointe à celle de A. La propriété d'égalité au bout de k tirages est ainsi équivalente à l'obtention de k face dans les $2k$ tirages de la liste A jointe à la liste miroir. La probabilité de cet événement est $q_k = C(2k, k)/2^{2k} = (-1)^k C(-1/2, k)$.

Cet événement peut avoir été réalisé précédemment, la première fois au bout de $m \leqslant k$ tirages, événement de probabilité p_m ; après quoi l'égalité se reproduit en $k - m$ tirages. Ainsi l'égalité après k tirages se réalise de plusieurs façons différant par le rang de la première égalité, et on a, pour $k \geqslant 1$, $q_k = \sum_{m=1}^{k} p_m q_{k-m}$, où on pose $q_0 = 1$.

Les fonctions génératrices $P(z) = \sum p_m z^m$ et $Q(z) = \sum q_m z^m$ sont liées par la relation $Q(z) = 1 + P(z)Q(z)$; la valeur de q_k donne $Q(z) = 1/\sqrt{1-z}$, puis $P(z) = 1 - \sqrt{1-z}$ et finalement $p_m = (-1)^{m-1} C(1/2, m) = q_m/(2m-1)$.

2. POINTS ENTIERS SUR PH

L'équation s'écrivant $1 + 4z^2 = (1 - 4x)(1 - 4y)$, Fermat nous indique qu'en entiers positifs les diviseurs du premier membre, somme de deux carrés premiers entre eux, sont de la forme $4m + 1$.
Les points à coordonnées entières se situent donc dans le dièdre $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$. Le plan de cote entière z contient les points $(-z^2, 0, z)$, $(0, -z^2, z)$ et éventuellement d'autres points entiers si $1 + 4z^2$ n'est pas premier, par exemple pour $z = 4$: $(-1, -3, 4)$ et
$(-3, -1, 4)$ en plus de $(-16, 0, 4)$ et $(0, -16, 4)$.

3. ENVELOPPE POUR TRIANGLE

Menons la parallèle à AB passant par O_c et la parallèle à AC passant par O_b.
Elles se coupent en un point P. L'égalité (en angles orientés définis à π près) $(PO_c, PO_b) = (AB, AC)$ = constante montre que P parcourt un cercle (arc capable) Γ du plan fixe, quand le triangle ABC se déplace en maintenant les contacts avec (O_c) et (O_b). D'autre part, compte tenu de ces contacts de AB et AC, le point P occupe une position fixe par rapport au triangle ABC, indépendante du déplacement de ce dernier. La parallèle menée à BC par P recoupe Γ en un point O_a, qui est un point fixe du plan fixe, car $(PO_b, PO_a) = (CA, CB)$ = constante. La distance de O_a à BC est constante, égale à la distance de P à BC.
Il en résulte que, dans le déplacement du triangle décrit par l'énoncé, la droite BC enveloppe un cercle de centre O_a.

POST-SCRIPTUM À « DONNÉES DÉTERMINANTES »
(*LA JAUNE ET LA ROUGE* D'AVRIL 2022)

Pierre Leteurtre (X55) observe qu'un sommet du triangle et un seul se projette sur OI dans le cercle inscrit. A R et r fixés, le périmètre du triangle est fonction continue et monotone de cette projection.

Solution du bridge

Il faut jouer un seul coup d'atout pour l'A ; expasser l'A♦ et rentrer au R♠ pour défausser la D♣ sur le 10♦ ; ensuite on coupe les deux ♣ du mort et on donne 3 ♥. Résultat : 4♠ = .

Ouest	
♠	10 5 4
♥	
♦	8 5 4 3
♣	R V 9 7 6 2

Est	
♠	9
♥	A D V 3
♦	A V 6 2
♣	A 10 8 3

Solution du Kakuro

	1	7	6	2	3		3	2
	2	5	9	8	4	1	6	3
		1	3	6	7	2	4	5
	7	4	2	3		5	1	6
	5	3	4	7	2	6	8	1
	4	8	5	9	1	3	2	
	2	6	7	4	8	9	5	1
	1	2		1	5	4	7	2

Solution du Rikudo